VIII. MOMENTOS DE INERCIA

Recordemos que el momento estático es la suma de los productos de cada elemento (peso, masa, volumen, etc.) de un cuerpo por su distancia a un eje. El momento de inercia, en cambio es la suma de los productos de cada elemento de un cuerpo por el cuadrado de su distancia a un eje. Como la distancia está elevada al cuadrado, los momentos de inercia también se llaman momentos de segundo orden o, simplemente, segundos momentos. Por esa misma razón, los momentos de inercia son escalares siempre positivos. Hay momentos de inercia del peso, de la masa, del volumen de los cuerpos, y de áreas y de líneas. A diferencia de los estáticos, que son cantidades meramente matemáticas, los momentos de inercia de las masas respecto a un eje miden la oposición de los cuerpos a girar alrededor de dicho eje, y su conocimiento resulta imprescindible para estudiar el movimiento de los cuerpos.

Así como el momento estático de la masa de un cuerpo respecto al eje de las equis se puede obtener mediante la expresión

$$B_x^m = \bar{y}m$$

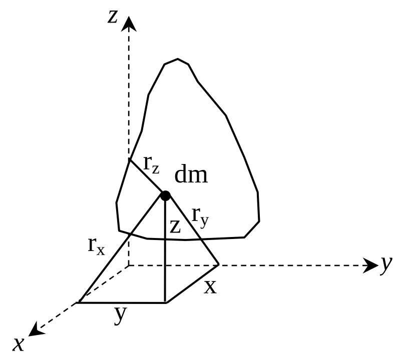
en donde $\bar{y}$ es la distancia del centro de masa al eje de las equis, el momento de inercia de la masa de un cuerpo respecto al mismo eje se puede expresar como

$$I_x = k^2 m$$

en donde k es cierta distancia al eje de la equis, que recibe el nombre de radio de giro. Tal distancia corresponde al lugar en el que habría que concentrar toda la masa del cuerpo para que conservara su momento de inercia respecto a cierto eje.

Consideremos el menhir de la figura y una partícula cualquiera de masa diferencial dm, cuyas distancias a los ejes cartesianos son r_x, r_y y r_z, respectivamente. Los momentos de inercia de esa partícula serán

$$dI_x = r_x^2 dm$$
$$dI_y = r_y^2 dm$$
$$dI_z = r_x^2 dm$$



por tanto, los momentos de inercia de la masa del menhir serán

$$I_x = \int r_x^2 dm$$
$$I_y = \int r_y^2 dm$$
$$I_z = \int r_z^2 dm$$

Como se puede apreciar, empleando el teorema de Pitágoras, $r_x^2 = y^2 + z^2$, Sustituyendo este resulta-do en la expresión del momento de inercia, tendremos

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = \int y^2 dm + \int z^2 dm$$

Estas dos últimas expresiones corresponden a lo que podríamos llamar momentos de inercia con respecto a los planos *xz* y *yz*, respectivamente:

$$I_{xz} = \int y^2 dm$$
$$I_{xy} = \int z^2 dm$$

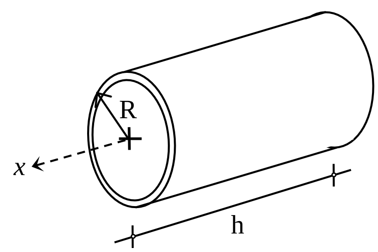
Las expresiones que acabamos de escribir serán muy útiles en el cálculo de los momentos de inercia de los cuerpos.

Momentos de inercia de la masa de algunos cuerpos

Para nuestro curso básico resulta necesario conocer los momentos de inercia de la masa de algunos cuerpos de forma común, como el cilindro, la esfera, el cono y el prisma rectangular.

Momento de inercia de la masa de un cilindro de pared delgada

El cálculo del momento de inercia de la masa m de un cilindro de radio R de pared delgada (es decir, de un cilindro cuyos radios interior y exterior son prácticamente iguales) con respecto a su eje de figura resulta muy sencillo, pues cualquiera de sus partes se encuentra a un radio de distancia de dicho eje. Por tanto, su momento de inercia será

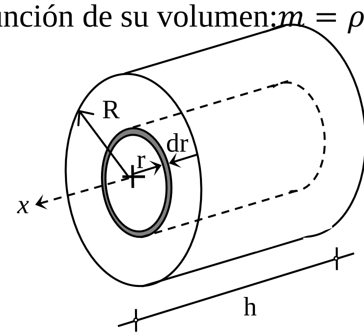


$$\boxed{I_x = mR^2}$$

Momento de inercia de la masa de un cilindro macizo

Para calcular el momento de inercia de la masa de un cilindro macizo y homogéneo de masa m, radio R y altura h, respecto a su eje de figura, comenzaremos determinando su masa en función de su volumen: $m = \rho V$.

La cantidad que hemos designado con ρ (ro) es la masa específica (o masa por unidad de volumen), también llamada densidad. Por tanto



$$m = \rho\pi R^2 h$$

Ahora vamos a descomponer el cuerpo en infinidad de cilindros de pared delgada concéntricos.

Cada uno de ellos tendrá un radio *r* y un espesor *dr*, como se muestra en la figura. El volumen de dicho elemento diferencial será

$$dv = 2\pi rhdr$$

que corresponde lo largo (h), lo ancho (2πR) y el espesor (dr) del elemento. O sea que su masa es

$$dm = \rho\, dV$$
$$dm = 2\rho\pi rhdr$$

por tanto, su momento de inercia será

$$dI_x = r^2 dm$$
$$dI_x = 2\rho\pi r^3 hdr$$

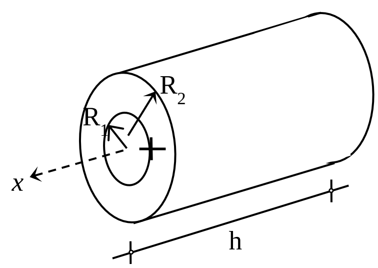
y el de todo el cilindro

$$I_x = 2\rho\pi h \int_0^R r^3 dr$$
$$I_x = \rho\pi r^4 h\, dr/2 = (\rho\pi R^2 h)R^2/2$$

Como lo contenido en el paréntesis es la masa del cilindro, podemos escribir

$$\boxed{I_x = \frac{1}{2} mR^2}$$

Ejemplo. Calcule el momento de inercia de un cilindro hueco, cuyos radios exterior e interior son R_2 y R_1, respectivamente. Utilice el resultado obtenido arriba para evitar cualquier tipo de procedimiento de integración.



Al momento de inercia de un cilindro macizo de radio R_2 le restaremos el momento de otro de radio R_1.

$$m = m_2 - m_1 = \rho V_2 - \rho V_1$$
$$m = \rho\pi R_2^2 h - \rho\pi R_1^2 h = \rho\pi h(R_2^2 - R_1^2)$$
$$I_x = I_2 - I_1 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 - \frac{1}{2} m_1 R_1^2$$
$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi R_2^4 h - \frac{1}{2}\rho\pi R_1^4 h = \frac{1}{2}\rho\pi h(R_2^4 - R_1^4)$$

Como el producto de dos binomios conjugados es la diferencia de los cuadrados

$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi h(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)}$$

Una fácil comprobación del resultado anterior sería tomar el caso de que R_1 y R_2 fueran iguales. Entonces el momento de inercia tendría un valor de mR^2, que es precisamente el que corresponde al de un cilindro de pared delgada.

Momento de inercia de la masa de una esfera

Para abordar el cálculo del momento de inercia de una esfera, comenzaremos expresando su masa en función del volumen.

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$$

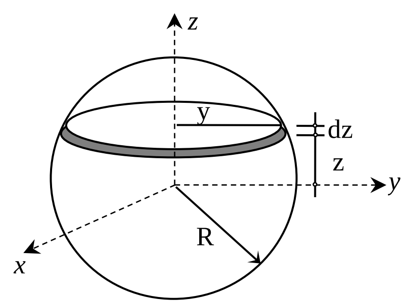
A continuación descompondremos la esfera en infinidad de cilindros infinitamente delgados, como se muestra en la figura.

$$dm = \rho dV = \rho\pi y^2 dz$$

El momento de inercia de un elemento diferencial es

$$dI_z = \frac{1}{2}y^2 dm = \frac{1}{2}\rho\pi y^4 dz$$

Puesto que debemos integrar con respecto a z, se requiere que y este en función de ella.



Como puede observarse, x, y y R se relacionan mediante el teorema de Pitágoras de la siguiente manera

$$y^2 + z^2 = R^2$$

$$y^2 = R^2 - z^2$$

por lo tanto

$$dI_z = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz$$

y el momento de inercia de toda la masa de la esfera respecto al eje z será

$$I_z = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2\, dz = \rho\pi \int_{0}^{R} (R^2 - z^2)^2\, dz$$

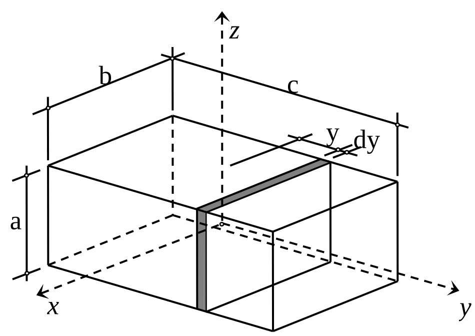
Desarrollando el binomio

$$I_z = \rho\pi \left[\frac{4}{R}\int_0^R dz - 2R^2 \int_0^R z^2 dz + \int_0^R z^4 dz\right]$$

$$I_z = \rho\pi \left[R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5\right] = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\rho\pi R^3\right) R^2$$

$$\boxed{I_z = \frac{2}{5} m R^2}$$

Momento de inercia de la masa del prisma rectangular



Para la obtención del momento de inercia de la masa de un prisma rectangular con respeto a un eje recurriremos a los momentos con respecto a los planos cartesianos con el fin de simplificar el proceso. La masa del prisma, en función de su volumen es

$$m = \rho V = \rho abc$$

Como elemento diferencial tomaremos una placa rectangular de espesor infinitamente pequeño, cuya masa es

$$dm = \rho dV = \rho ab dy$$

El momento de inercia de tal elemento respecto al plano xz es

$$dI_{xz} = y^2 dm = \rho ab y^2 dy$$

y el de todo el cuerpo, respecto al mismo plano.

$$I_{xz} = \rho ab \int_{-c/2}^{c/2} y^2 dy = \rho ab \int_0^c y^2 dy$$

$$I_{xz} = \frac{1}{3}\rho abc^3$$

El momento de la masa respecto al plano xy se obtiene de modo semejante, y fácilmente se puede deducir que es

$$I_{xy} = \frac{1}{3}\rho a^3 bc$$

Ahora bien, como $I_x = I_{xy} + I_{xz}$

$$I_x = \frac{1}{3}\rho a^3 bc + \frac{1}{3}\rho abc^3 = \frac{1}{3}\rho abc(a^2 + c^2)$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{3}m(a^2 + c^2)}$$

Como puede deducirse fácilmente, dada las simetrías del prisma, los momentos de inercia de su masa, respecto a los otros planos, se puede obtener simplemente cambiando las variables. Así

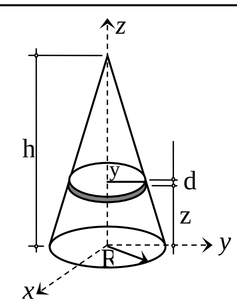
$$\boxed{I_y = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)}$$

$$\boxed{I_z = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2)}$$

Momento de inercia de la masa de otros cuerpos

Hemos visto cómo se calculan los momentos de inercia de varios cuerpos que son, a nuestro juicio, los más significativos. Los de otros cuerpos, como el del cono, pueden calcularse de modo semejante al de la esfera, o con los razonamientos que seguimos en el del prisma.

Ejemplo. Sabiendo que el momento de inercia de un cono de altura h y cuya base tiene un radio R, res-pecto al eje de las zetas es $\frac{3}{10}mR$, determine el momento de inercia de su masa respecto a un diámetro de su base.



Como la suma de los momentos respecto a dos planos que se intersecan en un eje es igual al momento de inercia respecto a dicho eje, es decir

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_{xy} = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}\left[h^2 \int_0^h z^2 dz - 2h\int_0^h z^3 dz + \int_0^h z^4 dz\right]$$

$$I_{xy} = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}h^5 - \frac{1}{2}h^5 + \frac{1}{5}h^5\right]$$

$$I_{xy} = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}\left(\frac{1}{30}h^5\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}\rho\pi R^2 h\right)h^2$$

$$I_{xy} = \frac{1}{10}mh^2$$

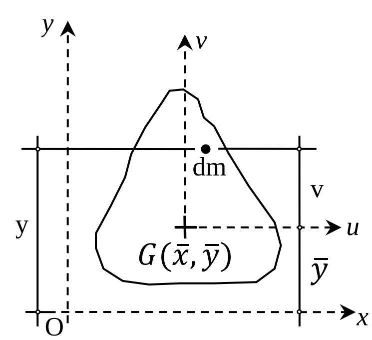
Sumando los dos momentos de inercia

$$I_y = \frac{1}{10}mh^2 + \frac{3}{10}mR^2$$

$$\boxed{I_y = \frac{1}{10}m(h^2 + 3R^2)}$$

Teorema de los ejes paralelos (o de Steiner)

Consideremos un menhir de masa m, cuyo centro se encuentra en $G(\bar{x}, \bar{y})$, Elegiremos dos sistemas de referencia. El *xOy*, arbitrario, y el *uGv*, centroidal y con eje paralelos a los anteriores, como se muestra en la figura.



El momento de inercia de la masa del menhir respecto al eje de las equis es

$$I = \int y^2 dm$$

pero, como se puede deducir de la construcción, $y = \bar{Y} + v$, por tanto

$$I_x = \int (v + \bar{y})^2 dm = \int v^2 dm + 2\bar{y}\int v dm + \bar{y}^2 \int dm$$

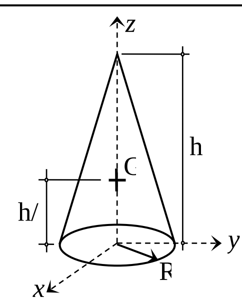
La primera integral es el momento de inercia de la masa del menhir respecto al eje de las úes; la segunda, el momento estático de la masa respecto al eje de las úes, y, por ser centroidal, es nula. La tercera es la masa, que resulta multiplicada por la distancia entre los dos ejes horizontales. Por tanto, podemos escribir

$$I_x = I_v + m\bar{y}^2$$

$$\boxed{I_x = \bar{I} + m\bar{y}^2}\ QED$$

Escribimos $\bar{I}$ en vez de I_v por tratarse de un momento de inercia respecto a un eje centroidal El teorema se aplica a todos los momentos de inercia, no sólo a los de masa, y se puede enunciar de la siguiente manera: *El momento de inercia respecto a un eje cualquiera es igual al momento respecto a un eje centroidal paralelo al primero, más el producto de la masa multiplicada por la distancia entre los ejes al cuadrado.*

Ejemplo. Calcule el momento de inercia de la masa de un cono de masa *m*, de altura *h* y cuya base tiene un radio *R*, respecto a un eje centroidal paralelo a cualquiera de los diámetros de su base.



$$I_y = \bar{I} + m\bar{y}^2$$

$$\bar{I} = I_y - m\bar{y}^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{10}m(h^2 + 3R^2) - m\left(\frac{h}{4}\right)^2$$

También

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

Como $I_{xz} = I_{yz}$, entonces

$$I_y = 2I_{yz}$$

de donde

$$I_{yz} = \frac{3}{20}mR^2$$

y falta calcular el momento de inercia con respecto al plano *xy*:

$$m = \rho V = \frac{1}{3}\rho\pi R^2 h$$

$$dm = \rho dV = \rho\pi y^2 dz$$

pero

$$z = h - \frac{h}{R}y$$

de donde

$$y = \frac{R}{h}(h - z)$$

El momento de inercia del elemento diferencial es

$$dI_{xy} = z^2 dm = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}(h - z)^2 z^2 dz$$

$$dI_{xy} = \rho\pi \frac{R^2}{h^2}[h^2 z^2 - 2hz^3 - z^4]dz$$

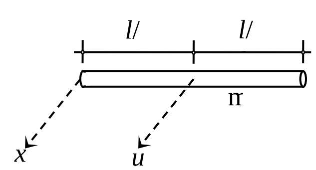
del cono completo

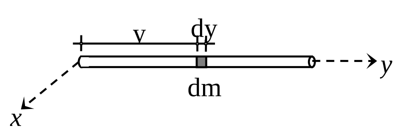
$$\bar{I} = \frac{1}{10}mh^2 + \frac{3}{10}mR^2 - \frac{1}{16}mh^2$$

$$\bar{I} = \frac{3}{80}mh^2 + \frac{3}{10}mR^2$$

$$\boxed{\bar{I} = \frac{3}{80}m(h^2 + 8R^2)}$$

Ejemplo. Determine el momento de inercia de una barra delgada de masa m respecto a un eje perpendicular a su eje de figura que pase por uno de sus extremos, y respecto a otro, centroidal, paralelo al anterior.





La masa de la varilla es

$m = \rho V = \rho A l$

en donde A es el área, infinitamente pequeña, de la sección transversal. La masa del elemento diferencial es

$$dm = \rho A dy$$

y su momento de inercia con respecto al eje de las equis

$$dI_x = y^2 dm = \rho A y^2 dy$$

De toda la varilla

$$I_x = \rho A \int_0^l y^2 dy = \frac{1}{3}\rho A l^3 = \frac{1}{3}(\rho A l) l^2$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{3} m l^2}$$

Empleando el teorema de los ejes paralelos

$$I_x = \bar{I} + m\bar{y}^2$$

$$\bar{I} = \bar{I_x} - m\bar{y}^2$$

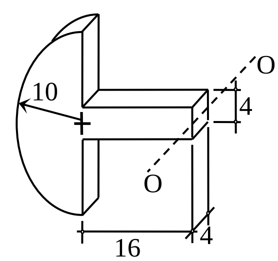
$$\bar{I} = \frac{1}{3} m l^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m l^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{\bar{I} = \frac{1}{12} m l^2}$$

Momentos de inercia de cuerpos compuestos

El momento de inercia de la masa de un cuerpo compuesto se obtiene sumando los momentos de inercia de cada una de sus partes. Ilustraremos el procedimiento mediante un ejemplo.

Ejemplo. La figura representa un cuerpo de 8 kg de masa compuesto por un semicilindro y un prisma de sección cuadrada. Calcule su momento de inercia con respecto al eje O'O.



Se trata de un cuerpo compuesto por un semicilindro y un prisma de sección cuadrada. Comenzaremos calculando la masa de cada parte

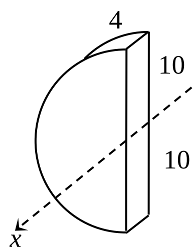
$$8 = m_1 + m_2 = \rho V_1 + \rho V_2$$

$$8 = \rho\left(\frac{1}{2}\pi 10^2\right)4 + \rho(4)4(16) = \rho(200\pi + 256)$$

$$\rho = 9.047x10^{-3}$$

por tanto $m_1 = 5.684$ y $m_2 = 2.316$

El momento de inercia de la masa del cuerpo es igual a la suma de los momentos de sus partes

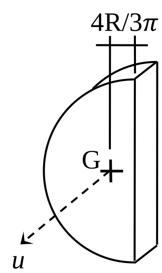


El momento de inercia del semicilindro respecto a su eje de figura es

$$I_x = \frac{1}{2}m_1R^2 = \frac{1}{2}m_1(10^2) = 50m_1$$

Y respecto a un eje centroidal paralelo al anterior

$$\bar{I} = I_x - md^2$$



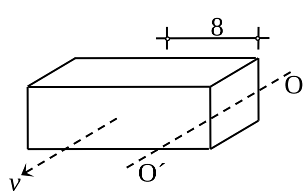
La distancia entre los ejes es

$$d = \frac{4R}{3\pi} = \frac{40}{3\pi} = 4.244$$
$$\bar{I} = 50m_1 - 4.244^2m_1$$
$$\bar{I} = (5.684)31.99 = 181.82$$

Calculamos ahora el momento de inercia respecto al eje O´O

$$I_O = \bar{I} + m_1D^2$$
$$I_O = 181.82 + 5.684(4.244 + 16)^2$$
$$I_O = 2511$$

El momento de inercia del prisma, respecto a un eje centroidal es



$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}m_2(a^2 + c^2) = \tfrac{1}{12}m_2a^2$$

y respecto al eje O´O

$$I_O = \bar{I} + m_2\bar{y}^2$$
$$I_O = \frac{1}{12}m_2a^2 + m_2(8^2)$$
$$= 2.316\left(\frac{4^2}{12} + 64\right)$$
$$I_O = 151.3$$

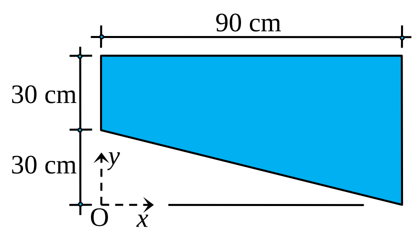
por tanto, de todo el cuerpo es

$$\boxed{I_O = 2660 \text{ kg·cm}^2}$$

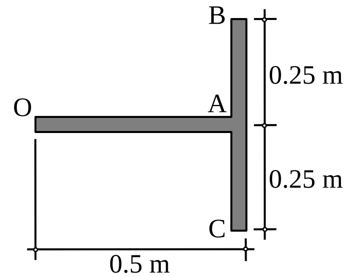
Serie de ejercicios de Estática
CENTROS Y MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS ([2])

1. Diga en qué casos el centro de masa de un cuerpo y su centro de gravedad coinciden.

2. Una placa de fierro de espesor uniforme tiene forma de trapecio y las dimensiones que se muestran en la figura. Determine las coordenadas de su centro de masa.
(*Sol.* G(50, 36.7) [cm])



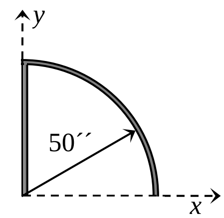
3. Las barras homogéneas *OA* y *BC* tienen 8 kg de masa cada una y están unidas en *A*, formando un solo cuerpo. ¿En dónde se halla su centro de masa?
(*Sol.* x_o = 0.375 m →)



([2]) Los primeros siete ejercicios se refieren al centro masa de los cuerpos. Podrían haberse incluido en la serie de momentos estáticos, pero hemos preferido integrarlos aquí por su estrecha relación con los momentos de inercia.

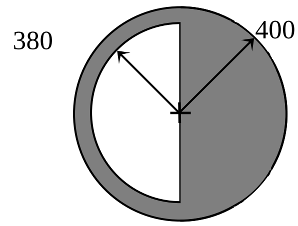
4. El radio del tramo circular de la varilla de la figura tiene 50 in de radio. Calcule las coordenadas del centro de masa de la varilla.

(*Sol.* G(19.45, 29.2) [cm])



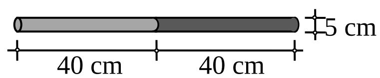
5. A un disco homogéneo de 400 mm de radio se le caló medio disco de 380 mm de radio, como se muestra en la figura. Diga en dónde se encuentra su centro de masa.

(*Sol.* x_o = 132.6 mm →)



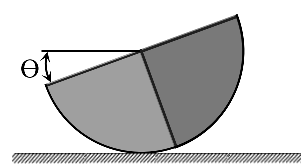
6. El árbol de una máquina tiene 80 cm de largo y su base tiene un diámetro de 5 cm. Su mitad izquierda es de plomo, la otra de cobre. Sabiendo que las masas específicas de esos materiales son 11.37 y 8.91 kg/dm^3, determine la posición del centro de masa del árbol.

(*Sol.* En el eje de la figura, a 37.6 cm del extremo izquierdo)



7. Un semicilindro reposa sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura. Una mitad es de acero, y la otra, de aluminio. Si los pesos espe-cíficos del acero y del aluminio son 7830 y 2690 kg/m^3, respectivamente, ¿qué valor tiene el ángulo Θ?

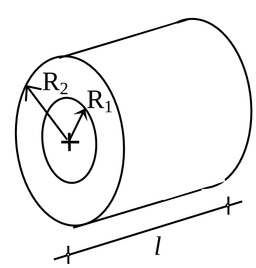
(*Sol.* 26.0°)



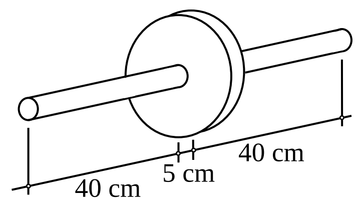
8. Explique cuáles son las características físi-cas de los cuerpos que se pueden medir mediante los momentos de inercia.

9. Determine, por integración, el momento de inercia de la masa de un cilindro hueco de altura *l*, cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, R_1 y R_2.

(*Sol.* (1/2) m [$R_1^2+R_2^2$])



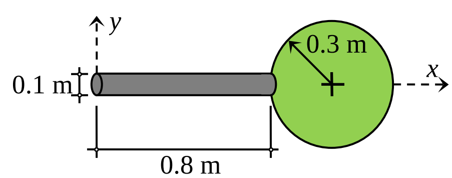
10. El rotor homogéneo de la figura está com-puesto por un eje cilíndrico y un disco, cuyos radios respectivos son 4 y 30 cm. Su masa es de 8 kg. Calcule el momento de inercia de su masa, respecto a su eje de figura.



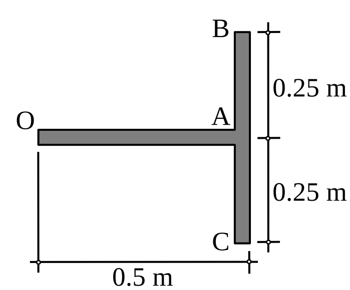
($Sol.$ $2820\ \mathrm{kg\cdot cm^2}$)

11. La figura representa un cuerpo formado por una esfera de 0.3 m de radio y un eje de 0.8 m de largo, cuya base tiene un diámetro de 0.1 m. Sabiendo que su material tiene una masa específica de 7210 kg/m^3, diga cuál es el momento de inercia de su masa respecto a *a)* su eje de figura *(x´x)*; *b)* un eje perpendi-cular al anterior, que pase por el extremo libre de la barra *(y´y)*.

($Sol.$ $a)\ \overline{I}_x = 29.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$; $b)$
$I_y = 1026\ \mathrm{kg\cdot m^2}$)

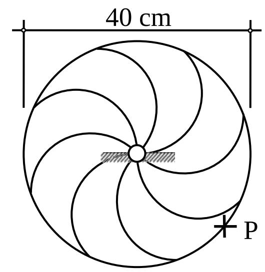


12. Las barras homogéneas *OA* y *BC* tienen 8 kg de masa cada una y están unidas en *A*, formando un solo cuerpo. Determine el momento de inercia de su masa respecto a un eje perpendicular al plano que las contiene y que pase por *O*.



($Sol.$ $2.83\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$)

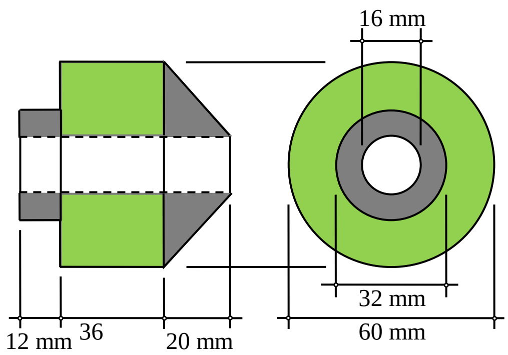
13. La masa del impulsor de una bomba centrífuga es de 12.5 kg. El radio de giro de su masa respecto al eje de rotación es de 15 cm. Determine el momento de inercia de la masa del impulsor respecto a: *a)* dicho eje de rotación; *b)* un eje, paralelo al anterior, que pase por el punto P.



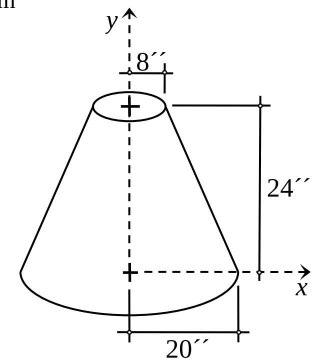
(*Sol.* $\bar{I} = 2810\ \text{kg} \cdot \text{cm}^2$;
$I_P = 7810\ \text{kg} \cdot \text{cm}^2$)

14. La pieza que se representa en la figura es de fierro colado, cuya masa específica es de 7.21 kg/dm^3. Determine el momento de inercia de su masa respecto a su eje de figura.

(*Sol.* $\bar{I} = 386\ \text{kg} \cdot \text{mm}^2$)



15. El cono truncado de la figura es de un material cuya masa específica es 410 slug/ft^3. Calcule el momento de inercia de su masa respecto a su eje de ´simetría *(y´y)* y respecto a uno diametral que pase por sul base *(x´x)*.



(*Sol.* $\bar{I}_y = 3280\ \text{slug} \cdot \text{ft}^2$;
$I_x = 4650\ \text{slug} \cdot \text{ft}^2$)

16. Calcule el momento de inercia de la masa del volante de acero de la figura, respecto a su eje de rotación. La masa específica del acero es 7.83 kg/dm^3. ¿Cuál es su radio de giro centroidal? Los rayos son cilíndricos.

(*Sol.* $\bar{I} = 877$ kg $\cdot$ m^2; $k = 68.3$ cm)